Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
9. Übung

1. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Sei $e_0 \in E(G)$ eine Kante mit $c(e_0) > (|V(G)| - 1) \max_{e \in E(G) \setminus \{e_0\}} |c(e)|$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn es einen b-Fluss g in (G, u) mit $g(e_0) = 0$ gibt, dann gilt $f(e_0) = 0$ für jede Optimallösung f. (4 Punkte)

2. Das fraktionale b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e \in E(G)} c(e) f(e)$ maximiert.

   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem lösen kann.

   (b) Man zeige, dass, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muss für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (3+2 Punkte)

3. Man betrachte eine Verallgemeinerung des Minimum-Cost-Flow-Problems, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten e). Eine Instanz (G, u, b, c) heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen b-Fluss f in (G, u) gibt mit $c(f) < \gamma$.

   (a) Man zeige, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen b-Fluss in (G, u) gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.

   (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$-Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.

   (c) Man zeige, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (2+2+2 Punkte)

4. Betrachten Sie noch einmal die Verallgemeinerung des Minimum-Cost-Flow-Problems, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind, aus Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass man Instanzen (G, u, b, c) dieser Verallgemeinerung in Zeit $O((k + n) \log(k + n)(m + n \log(n)))$ lösen kann, wobei k die Zahl der Kanten mit endlicher Kapazität sei (und wie üblich $n = |V(G)|$ und $m = |E(G)|$) (4 Punkte)

Sie finden den aktuellen Übungszettel stets auf der Übungs-Seite der Vorlesung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws25/edm_uebung_ws25.html`

Abgabe: Donnerstag, den 8.1.2026, 16:00 Uhr über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe.

`https://ecampus.uni-bonn.de/goto_ecampus_crs_3864991.html`